APRENDIENDO MATEMÁTICA

Crecimiento exponencial y relación con el COVID-19

Material didáctico para Nivel Secundario - Ciclo Orientado

Autores: Dr. Adrián Andrada[1], Lic. Emiliano Campagnolo[2], Dra. Patricia Kisbye[3].
Coordinador: Dr. Daniel Barraco[4]
Secretaria de Promoción de Ciencias y Nuevas Tecnologías: Dra. Patricia Kisbye

[1] FAMAF - UNC / CIEM - CONICET
[2] FAMAF - UNC / CIEM - CONICET
[3] Secretaría de Promoción de la Ciencia y las Nuevas Tecnologías
[4] Fundación para la interpretación de la Ciencia - Plaza Cielo Tierra

PLAZA CIELO TIERRA
Secretaría de PROMOCIÓN DE LA CIENCIA Y LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS
Ministerio de EDUCACIÓN
GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA
ENTRE TODOS

LAS NOTICIAS

A partir de la actual pandemia de coronavirus, en distintos medios de comunicación nos encontramos con frases, titulares y comentarios que hablan sobre "crecimiento exponencial" y de "achatar la curva". Por ejemplo, mostramos algunos titulares de notas periodísticas recientes:

https://www.infobae.com/america/tendencias-america/2020/03/16/el-crecimiento-exponencial-del-coronavirus-por-que-son-vitales-las-medidas-de-prevencion/

TENDENCIAS

El crecimiento exponencial del coronavirus: por qué son vitales las medidas de prevención

https://www.lavoz.com.ar/ciudadanos/coronavirus-18-nuevos-casos-positivos-en-cordoba

Coronavirus: 18 nuevos casos positivos en Córdoba

El nuevo reporte dado a conocer por el Ministerio de Salud de la Nación da cuenta de un aumento exponencial en la provincia, como consecuencia también del incremento en la cantidad de análisis realizados. En el país, 75 nuevos pacientes.

https://www.clarin.com/ciudades/coronavirus-plan-ciudad-hacer-frente-aumento-exponencial-infecciones_0_z0k9eu-x.html

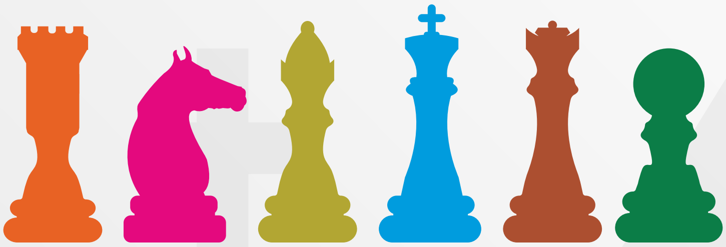
El avance del brote

Coronavirus: cómo es el plan de la Ciudad para hacer frente a un aumento exponencial de infecciones

¿SABÉS QUÉ SIGNIFICA UN CRECIMIENTO EXPONENCIAL?

Escuchá y mirá con atención el siguiente video, que cuenta la Leyenda del Ajedrez y los granos de arroz:

https://www.youtube.com/watch?v=Vi1Eo5QxDmM&feature=youtu.be



Como se puede ver en el video, al principio los casilleros tenían muy poquito arroz, y rápidamente comenzaron a llenarse con cantidades muy grandes.

Repasemos las cantidades de granos de arroz que tenían los casilleros de ajedrez: Cada casillero tiene el doble que la cantidad que tiene el casillero anterior. Entonces, el casillero tiene 1 grano de arroz, el casillero 2 tiene el doble que el anterior: 2x1 = 2, el casillero 3 tiene el doble que el casillero 2: 2x2 = 4, el casillero 4 tiene el doble que el casillero 3: 2x4 = 8, y así siguiendo.

Pero además, podemos escribirlo de la siguiente manera:
El casillero 1 tiene 1
El casillero 2 tiene 2
El casillero 3 tiene 2x2
El casillero 4 tiene 2x2x2
El casillero 5 tiene 2x2x2x2
El casillero 6 tiene 2x2x2x2x2
...y así con los siguientes casilleros.

Para escribir cuántos granos de arroz tiene el casillero 10, tendríamos que multiplicar el 2 por sí mismo 9 veces. Una forma de simbolizar esta multiplicación es la siguiente:

Ejemplo: $2^9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Esta escritura se llama potencia. La potencia tiene una base y un exponente. En el ejemplo, la base es 2 y el exponente es 9.

ACTIVIDAD:

Completá cuántos granos de arroz hay en cada uno de los casilleros hasta el casillero 11, y escribilo en cantidades y en forma de potencia.

Casillero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Granos	1	2	4	8	16						
En potencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5					

Habrás notado que utilizamos el exponente 0 y escribimos 2^0 para representar el 1. En matemática el exponente 0 indica que la potencia es igual a 1, por ejemplo, $2^0=1$, también $3^0=1$, $4^0 = 1$, siempre que la base no sea el número 0.

EL CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Observá que las cantidades de arroz son cada vez más grandes. Si las escribimos en forma de potencia, la base es siempre la misma, en este caso es el 2. El exponente es el que cambia. Por eso decimos que es un crecimiento exponencial

ACTIVIDAD:

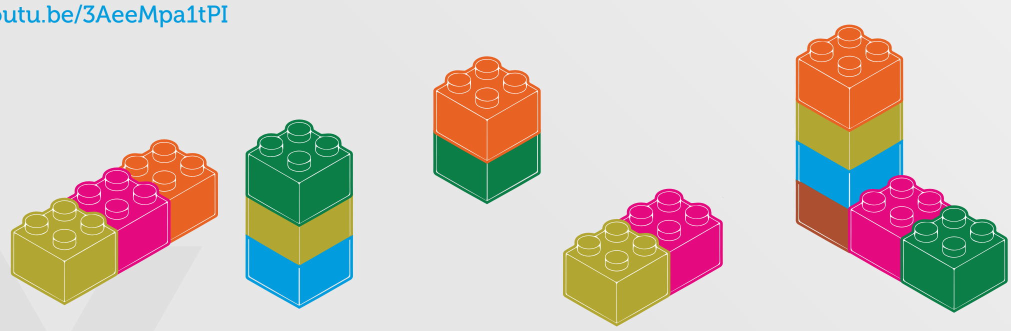
Si en la casilla 15 (la última que aparece con arroz en el video) el arroz pesa ½ kg,

1. ¿Cuánto pesará el arroz que está en la casilla 16?
2. ¿A qué casilla corresponde colocar 64 kg de arroz?
3. Cuando nos toca colocar el arroz correspondiente al casillero 16, debemos colocar ahí 2^15=32768 granitos de arroz, que constituyen aproximadamente un kilo de arroz. Por otro lado, la producción mundial anual de arroz es de aproximadamente 500.000.000 de toneladas de arroz, es decir, 500.000.000.000 kilos. Recordá que cada tonelada son 1.000 kg. Si fuera posible seguir completando el tablero de ajedrez, en algún momento en alguno de los casilleros tendríamos que poner una cantidad mayor que la producción mundial anual de arroz. ¿En qué casillero pasa esto por primera vez?

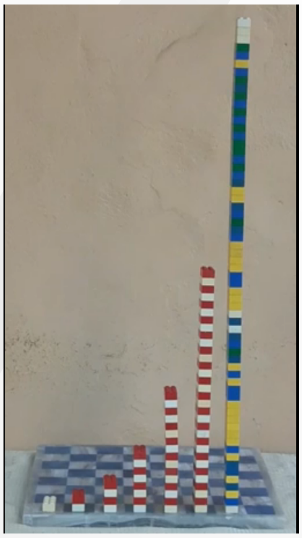
Respuestas: 1) 1Kg. 2) Casilla 22. 3) Casilla 56

Hagamos algunos gráficos:

Miremos ahora el siguiente video, donde cambiamos granos de arroz por pilas de ladrillos o bloques:
https://youtu.be/3AeeMpa1tPI



La altura de los ladrillitos crece de forma exponencial, y si tuviéramos una cantidad suficiente de ladrillitos llegaríamos en algún casillero a la altura del reloj Cucú en Carlos Paz, en otro a la altura del Cerro Champaquí, en otro a la altura del Aconcagua, e incluso habrá una pila que alcance a la Luna, otra al Sol y a la estrella más cercana al Sol.
Por eso el crecimiento exponencial es algo tan difícil de comprender.



Hagamos algunas cuentas:

Cada ladrillito mide 1 cm de altura, ¿cuántos ladrillitos hace falta apilar para llegar a la altura del obelisco? ¿y para llegar a la luna? ¿Cuál es la primera pila que es más alta que el obelisco?

Te damos algunas ayudas:
La altura del obelisco es de 68 metros, es decir, 6.800 cm. Como en el casillero 13 la pila es de 4.096 ladrillitos de 1 cm, entonces la pila mide 4.096 cm. La pila 14 mide el doble, es decir 8.192 cm, y es la primera pila que es más alta que el Obelisco.

ACTIVIDAD

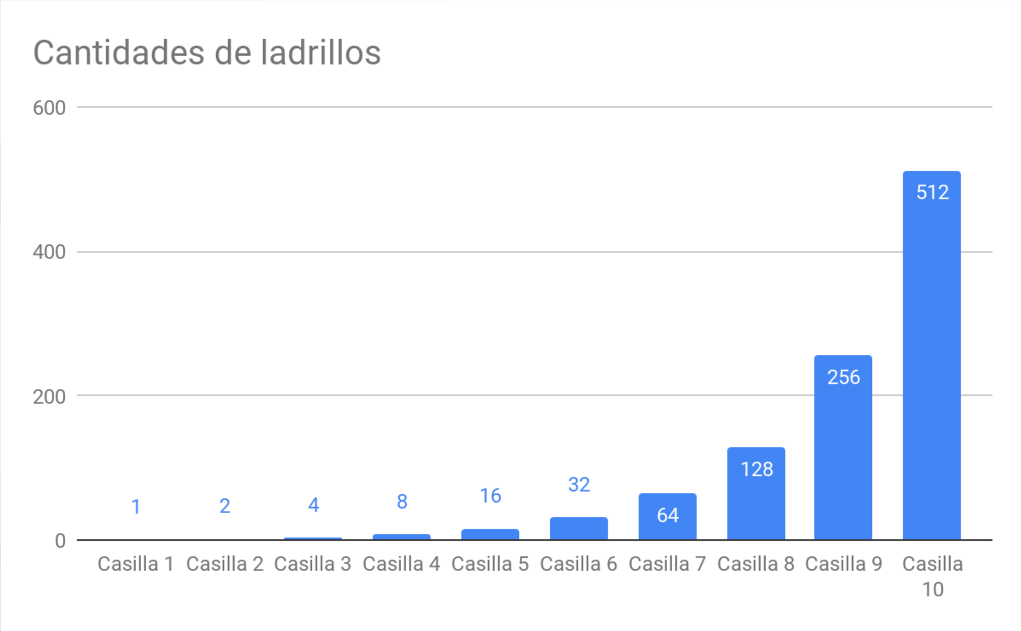
Te invitamos a que hagas una cuenta parecida para las siguientes alturas: ¿En qué casillero está la pila que primero lo alcanza? Recordá hacer los cambios de unidades correspondientes.

1. La altura del Aconcagua es de 6.956 metros (695.600 cm).
2. La torre Ángela de la Ciudad de Córdoba mide 110 m = 11.000 cm
3. La altura del Reloj Cucú de Carlos Paz: 7,5 metros
4. La altura del Cerro Uritorco: 1.979 metros
5. Los aviones de pasajeros vuelan a 10 km de altura
6. La distancia de la Tierra a la Luna: 384.400 km
7. La distancia de la Tierra al Sol: 54.600.000 km
8. La distancia de la Tierra a la estrella más cercana, después del Sol, es de 4 años luz. Esto es aproximadamente 4.000.000.000.000.000.000 cm, es decir, 4 trillones de centímetros

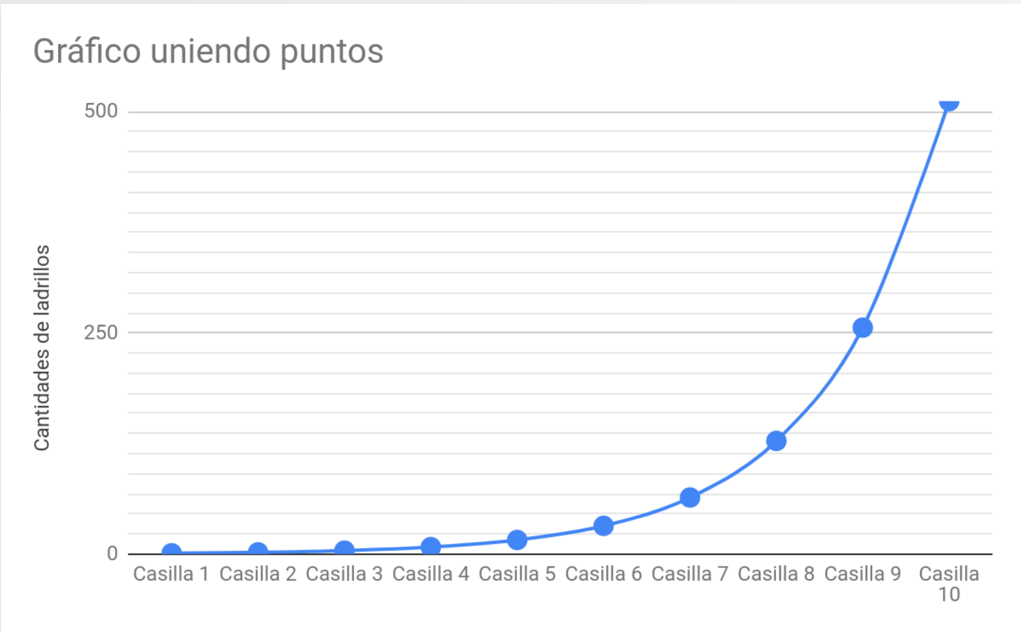
Respuestas: 1) Casillero 19. 2) Casillero 13. 3) Casillero 12. 4) Casillero 17. 5) Casillero 19. 6) Casillero 34. 7) Casillero 42. 8) Casillero 62

Ahora sí, los gráficos:

Podemos representar las cantidades de ladrillitos en un gráfico de barras de la siguiente manera:



También podemos marcar un punto a la altura de cada pila, y luego unirlos con un segmento o con una curva, y tendremos un gráfico de líneas:



Este es el tipo de gráfico que solemos ver en las noticias, cuando nos muestran el número de casos confirmados por día de coronavirus, o la cantidad total de contagiados. Por eso en las noticias nos dicen que la pandemia tiene un crecimiento exponencial.
Por ejemplo, el siguiente gráfico nos muestra la cantidad total de infectados por coronavirus en España, desde el 9 de febrero al 4 de marzo.

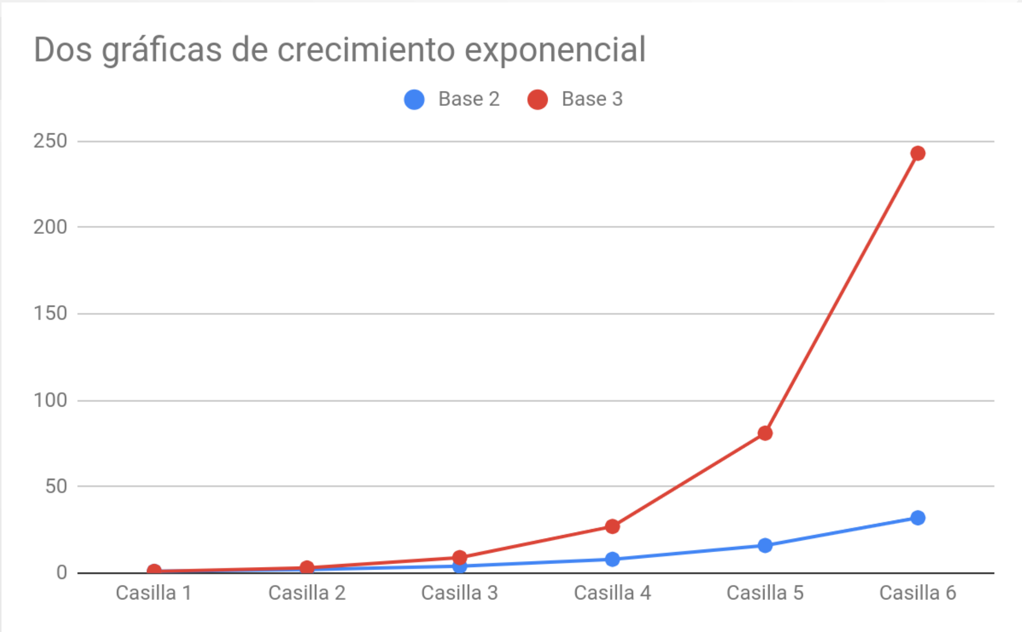
CAMBIEMOS LA BASE

¿Qué ocurre si en vez de multiplicar por 2 en cada instancia lo hacemos por otro número? Por ejemplo, si en cada casilla multiplicamos por 3 el valor de la anterior tendremos:

Casillero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Granos	1	3	9	27	81						
En potencia	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5					

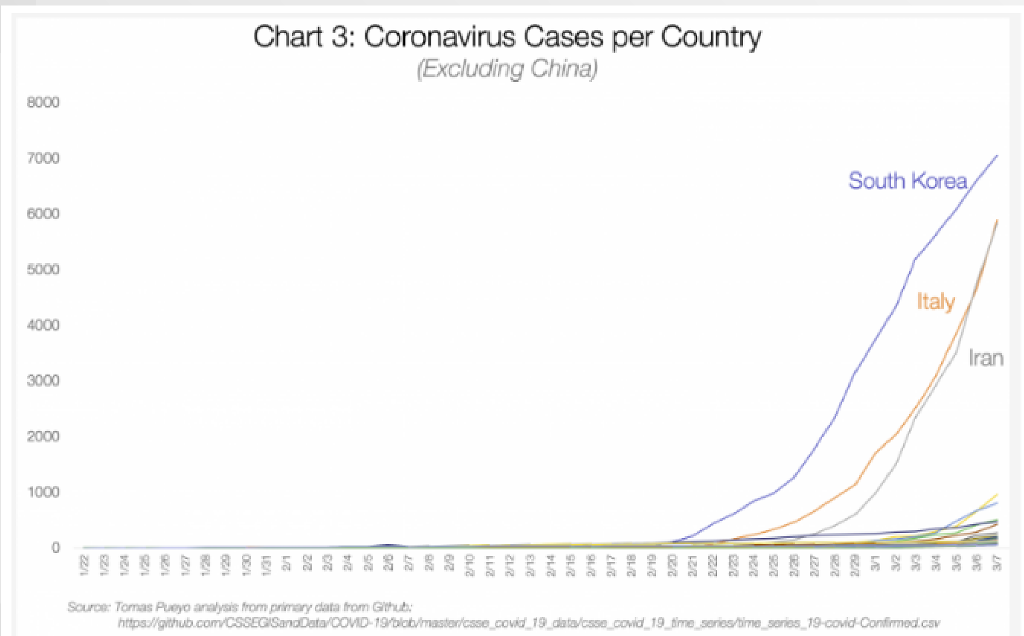
https://es.wikipedia.org/wiki/Pandemia_de_enfermedad_por_coronavirus_de_2020_en_Espa%C3%B1a

Si ahora graficamos las dos situaciones simultáneamente: para base 2 y para base 3, podrás ver que cuanto mayor es la base más rápido crecen los valores de las potencias:



En el caso del crecimiento exponencial del coronavirus, la base de las exponenciales son diferentes ya que dependen de las características de cada país.

https://www.pagina12.com.ar/253133-coronavirus-por-que-tenemos-que-actuar-ahora



También podríamos haber elegido como base al 4, al 5, al 10, o a cualquier otro número. ¡No hace falta que sea un número entero! Una potencia se puede calcular también si la base tiene parte decimal; por ejemplo,

$$(2{,}6)^4 = 2{,}6 \times 2{,}6 \times 2{,}6 \times 2{,}6 = 45{,}6976,$$
$$(7{,}15)^3 = 7{,}15 \times 7{,}15 \times 7{,}15 = 365{,}525875.$$

¿Podemos elegir como base a un número menor que 1? La respuesta es sí, y para calcular la potencia se usa el mismo procedimiento. Entonces, si nos piden calcular $(0{,}4)^5$, simplemente tenemos que hacer

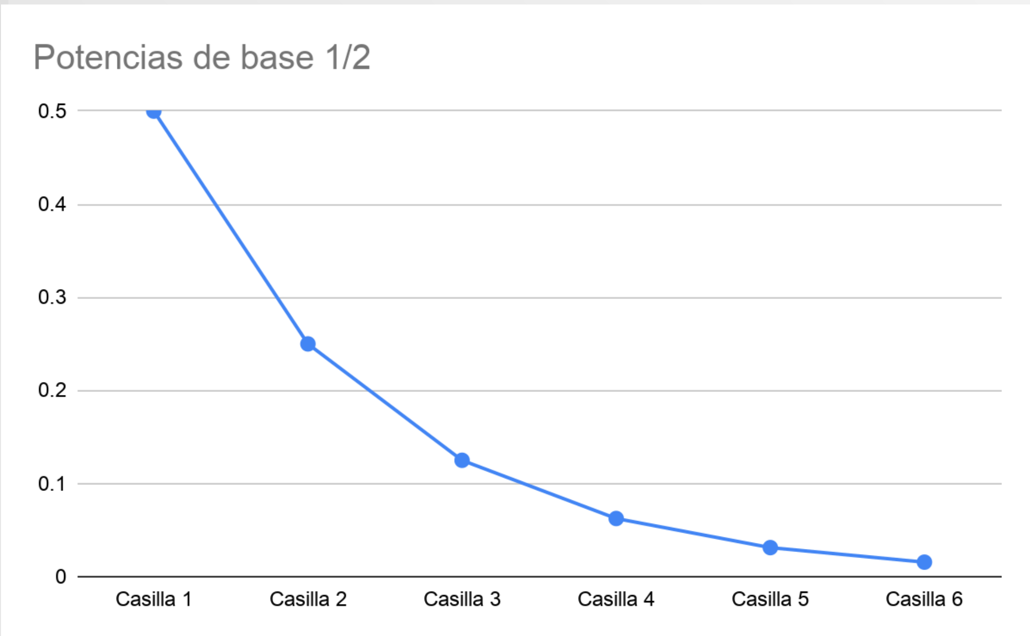
$$(0{,}4)^5 = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}01024.$$

Pero... ¡ATENCIÓN! Analicemos con más detenimiento las potencias de base menor que 1. Por ejemplo, vamos a considerar como base a 1/2, que escrito en notación decimal es 0,5. Dibujemos una tabla como hicimos antes, y completemos algunos de sus valores:

Exponente	1	2	3	4	5	6	7	8
Potencia	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{2})^5$	$(\frac{1}{2})^6$	$(\frac{1}{2})^7$	$(\frac{1}{2})^8$
En fracciones	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$			
En decimal	0,5	0,25	0,125	0,06225	0,031125			

¿Podés completar los valores que faltan?

Si miramos detenidamente la tabla, veremos que al crecer el exponente, el valor de la potencia va decreciendo. Intuitivamente, en cada paso nos estamos quedando con la mitad del valor anterior. Gráficamente, lo podemos representar de la siguiente manera:



En este caso se habla de decrecimiento (o decaimiento) exponencial.
Hasta el momento hemos considerado los casos de base mayor que 1 y de base menor que 1. Una pregunta natural que nos podemos hacer es qué sucede cuando la base es exactamente igual a 1. Empecemos a calcular algunas potencias con base 1:

- $1^1=1$
- $1^2=1$
- $1^3=1$
- $1^4=1$

En esta situación no hay crecimiento ni decrecimiento, las potencias con base 1 nos siempre el mismo resultado, que es 1.

En general, vale la siguiente regla:

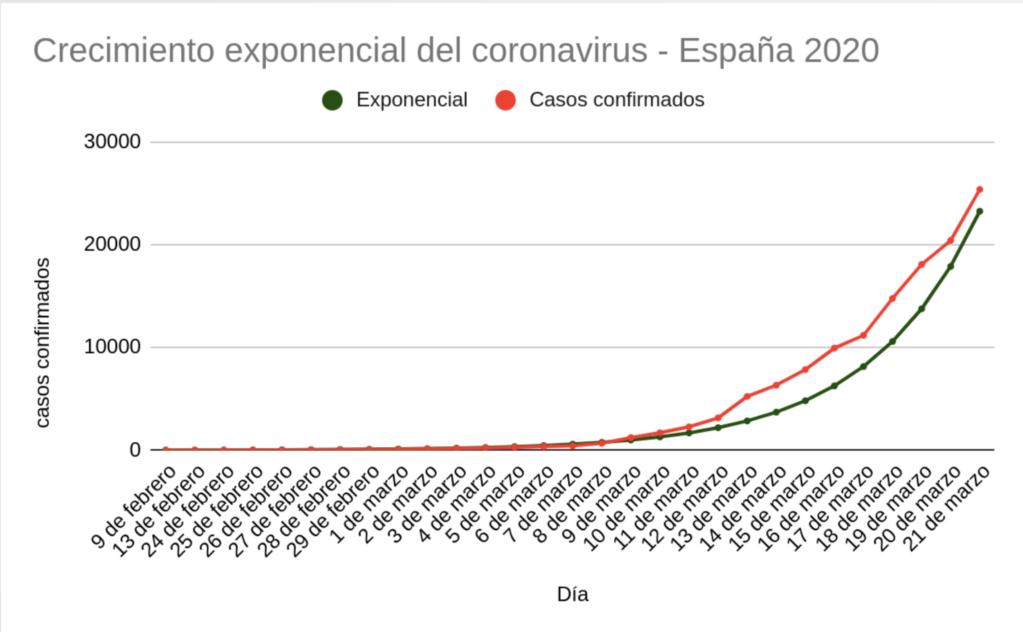
- Si la base es mayor que 1, al hacer crecer el exponente obtendremos un crecimiento exponencial de la potencia.
- Si la base es igual a 1, las potencias siempre dan el valor 1.
- Si la base es menor que 1, al hacer crecer el exponente obtendremos un decrecimiento exponencial de la potencia.

ACTIVIDAD INTEGRADORA

¡Achatamos la curva!
El siguiente gráfico te muestra los gráficos de líneas. Uno corresponde a el número de casos confirmados de coronavirus en España por día, hasta el 21 de marzo. El otro corresponde a datos de potencias con base 1.3 multiplicadas por 15:

$$15\times1 \ , \ 15\times1{,}3 \ , \ 15\times1{,}3^2 \ , \ 15\times1{,}3^2 \ , \ 15\times1{,}3^3 \ , \ldots$$

Como podrás observar, ambos gráficos de líneas son muy similares, tienen un crecimiento exponencial.



Por otro lado, la siguiente tabla nos muestra los datos del número total de casos confirmados de coronavirus en cada día, en la Argentina, desde el 10 de marzo hasta el 1 de abril. Además, en otra columna, tenés los valores de

$$17\ ,\ \ 17x1{,}25\ \ ,\ \ 17x1{,}25^2\ \ ,\ \ 17x1{,}25^3\ ...$$

hasta la fecha del 26 de marzo, pero faltan los últimos valores.

Día	Casos confirmados	Exponencial	
		en potencias	en valores
10 de marzo	19	17	17
11 de marzo	21	$17 \times 1{,}25$	21,25
12 de marzo	31	$17 \times 1{,}25^2$	26,56
13 de marzo	34	$17 \times 1{,}25^3$	33,20
14 de marzo	45	$17 \times 1{,}25^4$	41,50
15 de marzo	56	$17 \times 1{,}25^5$	51,88
16 de marzo	65	$17 \times 1{,}25^6$	64,85
17 de marzo	78	$17 \times 1{,}25^7$	81,06
18 de marzo	97	$17 \times 1{,}25^8$	101,33
19 de marzo	128	$17 \times 1{,}25^9$	126,66
20 de marzo	158	$17 \times 1{,}25^{10}$	158,32
21 de marzo	225	$17 \times 1{,}25^{11}$	197,91
22 de marzo	266	$17 \times 1{,}25^{12}$	247,38
23 de marzo	301	$17 \times 1{,}25^{13}$	309,23
24 de marzo	387	$17 \times 1{,}25^{14}$	386,54
25 de marzo	503	$17 \times 1{,}25^{15}$	483,17
26 de marzo	589	$17 \times 1{,}25^{16}$	603,96
27 de marzo	690	$17 \times 1{,}25^{17}$	....
28 de marzo	745	$17 \times 1{,}25^{18}$	....
29 de marzo	820	$17 \times 1{,}25^{19}$	....
30 de marzo	966	$17 \times 1{,}25^{20}$	....
31 de marzo	1054	$17 \times 1{,}25^{21}$	....
1 de abril	1133	$17 \times 1{,}25^{22}$	....

Datos del Ministerio de Salud de Argentina.

Más abajo está el gráfico de líneas para cada uno de los datos, pero faltan los últimos valores de la exponencial, que también hay que completar en la tabla. Observá cómo los dos gráficos están casi superpuestos. El número total de infectados por coronavirus tuvo un "crecimiento exponencial".

Te pedimos que calcules los valores faltantes y los marques en la gráfica, de manera aproximada. ¿Qué observás en esta última parte de los gráficos? ¿Siguen siendo similares?

El efecto que observás es un "achatamiento de la curva", porque el gráfico de líneas de los datos del coronavirus se achata con respecto al gráfico de los datos de la exponencial. Este efecto se produce, entre otras razones, gracias a las medidas de distanciamiento social para evitar una mayor propagación de la pandemia.

PLAZA CIELO TIERRA

Secretaría de PROMOCIÓN DE LA CIENCIA Y LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Ministerio de EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA

ENTRE TODOS

Espacio curricular: **Matemática**	
Años sugeridos: **4to, 5to y 6to años - Nivel Secundario.**	
Eje: : **Números y operaciones. Análisis de variaciones**	Observaciones:**Reflexionar sobre el concepto de crecimiento exponencial.**
Apendizaje y contenidos: **Utilización de la potenciación (con exponente entero) .Análisis de comportamiento de la función exponencial en su representación gráfica, restringida al dominio de los enteros no negativos.**	